

12/04/19

§ Μετασχηματισμός συντεταγμένων.

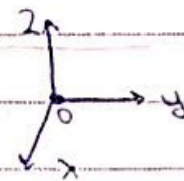
① παραλληλή μεταφορά.

Εάν $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O', \vec{x}'_0, \vec{y}'_0, \vec{z}'_0\}$ δύο συστήματα συντεταγμένων με

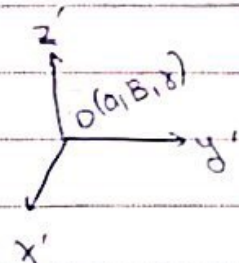
$$\begin{cases} \vec{x}_0 = \vec{x}'_0 \\ \vec{y}_0 = \vec{y}'_0 \\ \vec{z}_0 = \vec{z}'_0 \end{cases}$$

Τότε οι συντεταγμένες (x, y, z) των πρώτων συστημάτων συνδέονται με τις συντεταγμένες (x', y', z') του δεύτερου συστήματος μέσω αυτής της εξίσωσης.

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \\ z = z' + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - \gamma \end{cases}$$



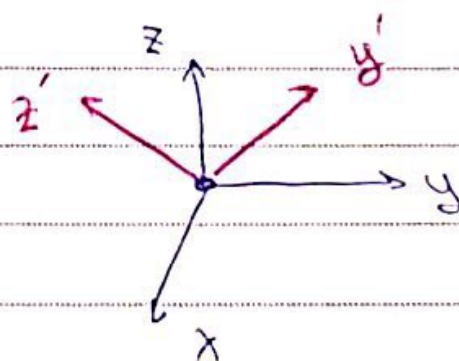
όπου (a, b, γ) οι συντεταγμένες των O' ως προς το πρώτο σύστημα.



② Στροφή

Έχουμε δύο συστήματα $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O, \vec{x}'_0, \vec{y}'_0, \vec{z}'_0\}$ (οι αναγκαστικά παραλληλολόγους). Τότε οι συντεταγμένες (x, y, z) του πρώτου συστήματος συνδέονται με τις συντεταγμένες (x', y', z') του δεύτερου συστήματος μέσω αυτής της εξίσωσης

$$\begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}$$



όπου a_i, b_i, γ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, οι γωνίες που σχηματίζουν οι άξονες.

Παρατήρηση

Ο πίνακας

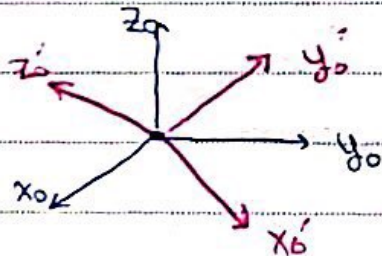
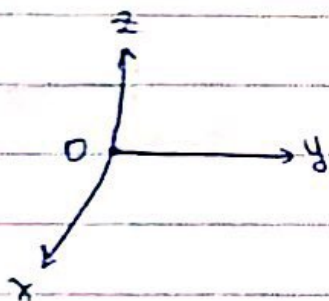
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιος.

$$A^T A = I \iff \boxed{A^{-1} = A^T}$$

③ Γενική περίπτωση

Συνδυασμός παράλληλης μεταφοράς και στροφής: Έχουμε το σύστημα $\{o, x_0, y_0, z_0\}$ και το $\{o', x', y', z'\}$.



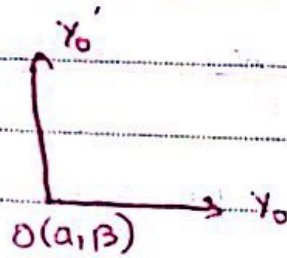
Στην γενική περίπτωση οι συντεταγμένες (x, y, z) και (x', y', z') συνδέονται μέσω αυτής της εξίσωσης

$$\begin{cases} x = a + a_1 x' + b_1 y' + \gamma_1 z' \\ y = b + a_2 x' + b_2 y' + \gamma_2 z' \\ z = \gamma + a_3 x' + b_3 y' + \gamma_3 z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = a_1(x-a) + a_2(y-b) + a_3(z-\gamma) \\ y' = b_1(x-a) + b_2(y-b) + b_3(z-\gamma) \\ z' = \gamma_1(x-a) + \gamma_2(y-b) + \gamma_3(z-\gamma) \end{cases}$$

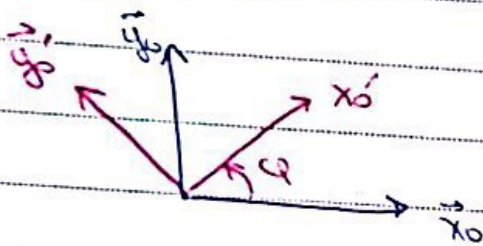
§ Εφαρμογή στο επίπεδο

① Παράλληλη μεταφορά



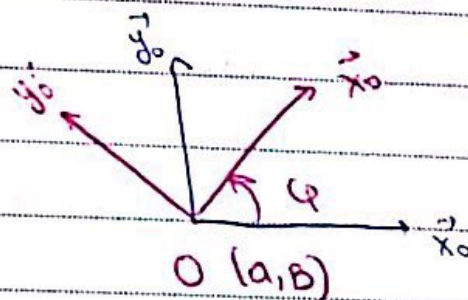
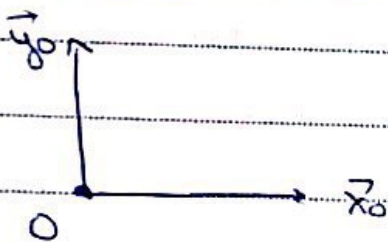
$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

② Στροφή



$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

③ Γενική περίπτωση



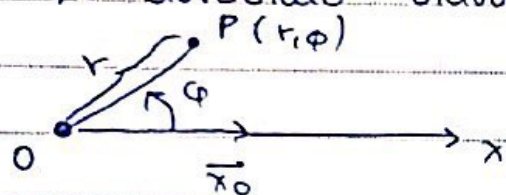
$$\begin{cases} x = a + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = b + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \varphi + (y - b) \sin \varphi \\ y' = (x - a) \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi \end{cases}$$

§ ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

① Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο

Θεωρούμε μια αρχή O και έναν μη μηδενικό Ox από το επίπεδο O με μοναδιαίο διανυσμα $\vec{x}_0$ πάνω γ' αυτό.



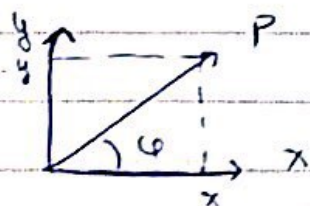
Στο τυχαίο επίπεδο P του επιπέδου αντιστοιχούμε την δυάδα (r, ϕ) με

$$\begin{cases} r = \|\vec{OP}\| \\ \phi = \angle(\vec{x}_0, \vec{OP}) \\ \quad \angle (\text{γωνία του } \vec{x}_0 \text{ με το } \vec{OP}) \end{cases}$$

Η γωνία ϕ μετράει κατά την θετική φορά και $\phi \in [0, 2\pi)$. Επίσης $r \in [0, +\infty)$

• Στην αρχή O έχουμε ότι $r=0$ και ϕ αραδιόριστη
το ζεύγος (r, ϕ) λέγεται πολικές συντεταγμένες του σημείου P .
Το σημείο O λέγεται πόλος και η ημιευθεία Ox λέγεται πολικός άξονας

Ο αριθμός r λέγεται πολική απόσταση και η ϕ πολική γωνία.

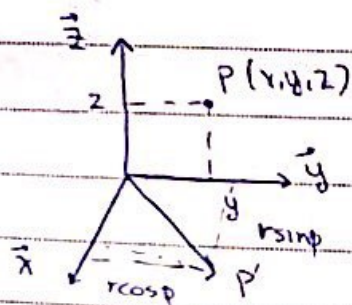


Οι πολικές και καρτεσιανές
συντεταγμένες συνδέονται μέσω της
έξισωσης

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = y/x \end{cases}$$

② Κυλινδρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε το σύστημα $\{\vec{0}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$



Είναι $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^3$

Συμβολίζουμε με P' την προβολή της P στο Oxy επίπεδο

Το OP' μπορούμε να το περιγράψουμε σε πολικές συντεταγμένες

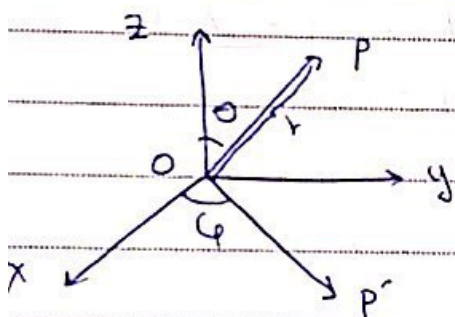
Συνολικά μπορούμε να περιγράψουμε το σημείο P ως εξής

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z' \end{cases}$$

Οι συντεταγμένες (r, φ, z)

λεγονται κυλινδρικές συντεταγμένες

③ Σφαιρικές συντεταγμένες



Σ' ένα τυχαίο σημείο $P(x, y, z)$ μπορούμε να αντιστοιχούμε μια άλλη τριάδα αριθμών (r, φ, θ)

$$\text{με } \begin{cases} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

ΕΓΓΙΩΓΗ

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Η σφαιρική (r, θ, φ)
λειτουργεί σφαιρικές
συντεταγμένες

Πυλαιοδίο (8)

Άσκηση 1

Δίνεται η καμπύλη

$$(x) : x^2 - 2y^2 + 2x - 12y - 18 = 0 \quad \text{στο σύστημα}$$

συντεταγμένων $\{\vec{0}, \vec{x}_0, \vec{y}_0\}$. Να βρεθεί η εξίσωση της
(x) σε νέο σύστημα συντεταγμένων $\{Q, \vec{x}_0, \vec{y}_0\}$ όπου
 $Q(-1, -3)$ & $\vec{x}_0 = (1, 0)$, $\vec{y}_0 = (0, 1)$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 3 \end{cases}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$X^2 - 2Y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= (X-1)^2 - 2(Y-3)^2 + 2(X-1) \\ &\quad - 12(Y-3) - 18 \\ &= X^2 - 2Y^2 - 1 \end{aligned}$$

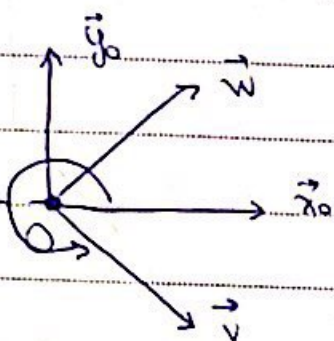
Άσκηση ②

Δίνεται η καμπύλη

$$(X) : x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x - 2y = 0$$

στο σύστημα συντεταγμένων $\{0, x_0, y_0\}$. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα $\{0, \vec{v}, \vec{w}\}$ με $\vec{v} = (1/2, -\sqrt{3}/2)$
 $\vec{w} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$

Λύση



$$\text{Έχουμε } \langle \vec{v}, \vec{x}_0 \rangle = \frac{1}{2} = \cos \varphi$$

Συνεπώς

$$\begin{cases} x = 1/2 \cdot x + \sqrt{3}/2 y \\ y = -\sqrt{3}/2 x + 1/2 y \end{cases}$$

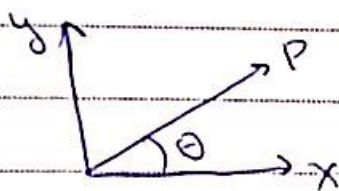
$$\Rightarrow Y = X^2$$

Άσκηση ③

① Δίνεται σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) η εξίσωση $r \cdot \cos(\theta - \pi/4) = 4$.
Να μετατραπεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Λύση

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$



Έχουμε

$$4 = r \left\{ \cos \theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$= r \cos \theta \frac{\sqrt{2}}{2} + r \sin \theta \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{4 = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y}$$